回転している液体ヘリウムのラムダ転移

AUTHOR(S):
岡本, 幸雄

回転している液体ヘリウムのラムダ転移

北大理　　岡 本 幸 雄

§ 1. Introduction

液体ヘリウムⅡの巨視的状態は，粒子数密度 n，流れの密度 $\boldsymbol{j}$，エントロピー密度 s とボーズ凝縮体の波動関数 Ψ によって記述できる。1958年，Pitaevskii [1),2)] は種々の保存則と線形不可逆過程の熱力学に基づいて，これらの量に対する現象論的方程式の組を導き，ラムダ点 (T_λ) 近傍での液体ヘリウムのふるまいを調べた。そこでは超流体密度 ρ_s が凝縮体密度 $m|\Psi|^2$ (m はHe原子の質量) と等しいとされた。しかし Ψ は一体の reduced density matrix の巨視的固有値 [3)] に属する固有関数であり，一方 ρ_s は超流動速度で流れる密度であるから，一般的には異なる量である。例えば $T\approx 0$ では，$\overline{\rho}_s/\overline{\rho}\approx 1$ (ρ は密度，$-$ は平均を意味する)，$m\overline{|\Psi|^2}/\overline{\rho}\sim 0.1$ [3)] であり ρ_s と $m|\Psi|^2$ は異なる。

Usui [4)−6)] は ρ_s と $m|\Psi|^2$ の違いを陽に扱って，Pitaevskii の方程式を改良した。下に Ψ の時間発展を記述する方程式のみ書く。$\rho_s = (m/n^*)\cdot m|\Psi|^2$ とおいて，

$$i\hbar\partial\Psi/\partial t = (-\hbar^2\nabla^2/2m + \mu + i\hbar B_i + i\hbar B_r)\Psi,$$

ここで $\hbar$ はプランク定数/2π，μ，B_i，B_r はエルミット，μ は chemical potential，B_r は平衡状態への relaxation を受けもつ項，B_i は relaxation が存在しない状態においての保存量が，$m|\Psi|^2$ ではなく ρ_s であることを要請することから出てくる項である。B_r だけ具体的に書いておく [4)]

$$B_r\Psi = -\frac{\Lambda}{\hbar}\left\{ (-i\hbar\nabla - m\mathbf{v}_n)\frac{1}{2m^*}(i\hbar\nabla - m\mathbf{v}_n) + \left|(-i\hbar\nabla - m\mathbf{v}_n)\Psi\right|^2\left[\frac{\partial}{\partial|\Psi|^2}\frac{1}{2m^*}\right]_{ns} + \left[\frac{\partial E_0}{\partial|\Psi|^2}\right]_{ns}\right\}\Psi \tag{1}$$

ここで，Λ は Onsager の運動論的係数，$\boldsymbol{v}_n$ は常流体速度，E_0 は一様な系におけるエネルギー密度，m^* と E_0 は n，s 及び $|\Psi|^2$ の関数である。式(1)は変分形で書くこと

もできて

$$B_r \Psi = -\frac{\Lambda}{\hbar} \frac{\delta}{\delta \Psi^*} \left[\int d\mathbf{x} E'(n, s, \mathbf{v}_n, \Psi, \Psi^*)\right]_{nsv_n},$$

$$E' = E - \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_n = E_0 + (1/2m^*) \,|\, (-i\hbar\nabla - m\mathbf{v}_n) \Psi |^2 - mn\mathbf{v}_n^2/2, \qquad (2)$$

ここでEはエネルギー密度である。

Ψの空間的変化が大きい状態では，式(1)において（∇m^*）の項が重要となりPitaevskiiのと異なる結果へ導くことが期待される。大見・市川・碓井[6]は超流動ヘリウムfilmの相転移を調べ，一次の相転移であるという結果を得た。Ginzburg-Pitaevskii[2]やMamaladze[7]の現象論的方程式では２次の相転移であると結論されるから顕著な違いを生じている。大見・市川・碓井の結論を支持するように思える実験[8]が存在するが，理論と実験とのより詳しい比較が望まれる。

この論文ではΨの空間的変化が大きい他の例として，回転している液体ヘリウムのλ転移点近傍でのふるまいを調べる。

§2. 問題の定式化

一様に回転している円筒状容器（半径 $R = 1\,cm$，深さ $h = 1\,cm$ 程度）内の液体ヘリウムのλ転移を調べる。角速度ωが充分大きいときは（$\omega \gg (\hbar/mR^2)\, ln\,(R/a)$ aは渦糸の芯の半径），速やかに平衡状態に達し，そして vortex lines は規則的に配列し，常流体とともに剛体回転している。[9] 常流体速度を基準にしてそこから超流体速度を測ることにして，$\Psi \equiv \Phi \exp(i\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{x}/\hbar)$とおいて式(1)に代入すれば，

$$(B_r \Psi) \exp(-i\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{x}/\hbar) \equiv B'_r \Phi$$
$$= -\frac{\Lambda}{\hbar} \left\{ (-i\hbar\nabla) \frac{1}{2m^*} (-i\hbar\nabla) + |-i\hbar\nabla\Phi|^2 \left[\frac{\partial}{\partial|\Psi|^2} \frac{1}{2m^*}\right]_{n,s} + \left[\frac{\partial E_0}{\partial|\Psi|^2}\right]_{ns} \right\} \Phi。$$

我々は平衡状態に関心を向けている。平衡状態における凝縮体の波動関数Φに対する方程式は，式(3)$= B'_r \Phi = 0$ である。独立変数をn，sからp，Tに変換し，Gibbs 自由エネルギー密度 $G(Tp\boldsymbol{v}_n \Phi \Phi^*)$を使う。Landau の２次相転移の理論の考えに基づ

いて，GをΦで展開して，

$$G(Tp\boldsymbol{v}_n\Phi\Phi^*) \equiv G_I + \Delta G,$$

$$\Delta G = A(T - T_\lambda)|\Phi|^2 + B|\Phi|^4/2 + (\hbar^2/2m^*)|\nabla\Phi|^2, \tag{4}$$

ここでG_Iは常流体に対する自由エネルギー密度，AとBは正の定数である。更に超流体密度の温度依存性が実験値と一致するようにm^*を決めて，[6]

$$\frac{\hbar^2}{2m^*} = \frac{\gamma}{|\Psi|^{2/3}} \qquad \gamma \text{は正の定数} \tag{5}$$

結局Φに対する方程式は，

$$-\gamma\nabla(|\Phi|^{-2/3}\nabla\Phi) - \gamma|\Phi|^{-8/3}|\nabla\Phi|^2\Phi/3 + A(T - T_\lambda)\Phi$$
$$+ B|\Phi|^2\Phi = 0。\tag{6}$$

今，温度のみならず圧力も空間的に一様であると考える（この近似については§4で議論する）。この場合でも方程式(6)を解くことは，many vortex lines が存在するときには困難であるので，これを簡単化し1個の渦糸の問題に還元する。即ち渦糸間の距離を直径とする円筒を考えその中での1個の渦糸の問題を解く。それに渦糸の数を考慮に入れて全体の解とする。上記の取り扱いによって問題は次のようになる。問題は方程式(6)を解くことである。回転軸をz軸として円筒座標（$r\ \varphi\ z$）を使い，1個の渦糸の解$\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi(r\varphi) = F(r)\exp i\varphi$を次の境界条件 —— many vortex lines の問題を解いているという状況を境界条件を通して部分的に考慮に入れる。——

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}F(\mathrm{r})\right]_{\mathrm{r=d}} = 0, \quad d \equiv \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \tag{7}$$ [10]

のもとで解く。

§3. ラムダ点のずれ

方程式(6)を dimensionless にする。$F/\Phi_{eq} = F_0$，$r/l = r_0$，$d/l = d_0$，$\Phi_{eq}^2 \equiv A(T_\lambda - T)/B$，$l^2 \equiv \gamma/B\Phi_{eq}^{8/3}$ とおくとF_0に対する方程式は(6)から次のようになる。

$$-\frac{d^2F_0}{dr_0^2}+\frac{1}{3F_0}\left(\frac{dF_0}{dr_0}\right)^2-\frac{1}{r_0}\frac{dF_0}{dr_0}-F_0^{5/3}+F_0^{11/3}+\frac{2}{3}\frac{F_0}{r_0^2}=0 \tag{8}$$

(8)を境界条件(7)を満たすように解く。次に解いた$F_0(r_0)$を自由エネルギー密度ΔGに代入して半径dの円筒内で積分して，渦糸の数をかけて自由エネルギー$\Delta G(T\omega)$を計算する。そして$\Delta G(T,\ \omega)$の正負を調べる。これらは数値的に解かれて，結果は図1に示されている。

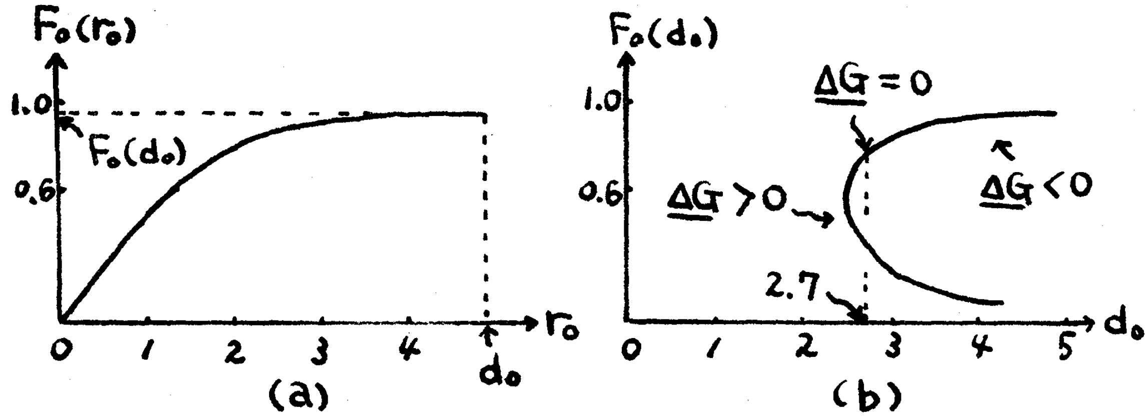

Fig. 1. (a) $r_0=4.9$ で $dF_0/dr_0=0$ の境界条件を満たすボーズ凝縮体の波動関数の動径部分
(b) d_0 が 2.7 より小さくなると常流動状態に転移する。

film の場合[6]と同様に，回転している液体ヘリウムのλ転移は1次であると結論される。転移温度T_λ^Rの，一様な系の転移温度からのずれは，$\underline{\Delta G}(T\omega)=0$となるときの$d_0$の値から求められる。

$$2.7\equiv d_{oc}=\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\left[\frac{1}{l}\right]_{T=T_\lambda^R}, \tag{9}$$

に，実験的[8]に決められたlの値，$l=3.0\times10^{-8}/(T_\lambda-T)^{2/3}$ (cm) を代入して，

$$T_\lambda-T_\lambda^R\approx1.0\times10^{-8}\times\omega^{3/4}\ 。 \tag{10}$$

この値は非常に小さく実験的で測定するのは難かしいようである。実験[11]では，$\omega < 35$ (rad/sec) で行なわれており，10^{-5} $degree$ の範囲で転移温度のずれは観測されていない。

§ 4. Discussion

比較のために Mamaladze [7] の提出した自由エネルギー G^{M} で，同じ問題を§ 2. § 3 と同じようにして計算した。ΔG^{M} は，

$$\Delta G^{\mathrm{M}} = -A'(T_\lambda - T)^{4/3}|\Phi|^2 + B'(T_\lambda - T)^{2/3}|\Phi|^4/2 + \hbar^2|\nabla\Phi|^2/2m, \tag{11}$$

ここで A' と B' は正の定数。結果は図 2 に示される。

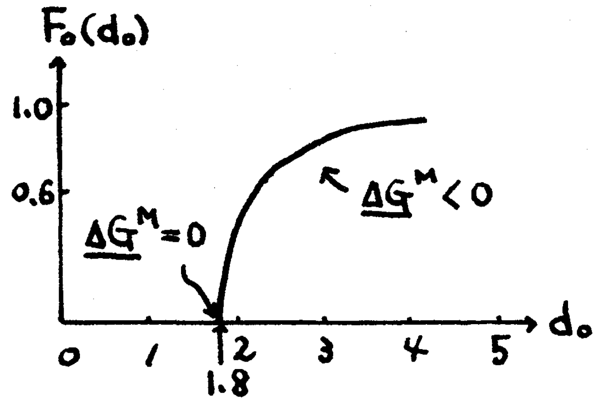

Fig. 2.　d_0 が1.8より小さくなると常流動状態に転移する

相転移の次数は 2次であり，転移点のずれは

$$T_\lambda - T_\lambda^{\mathrm{R}} \sim 5.4 \times 10^{-9} \times \omega^{3/4}, \tag{12}$$

となる。これは Mamaladze による詳しい計算の結果[7] とほぼ一致している。

Usui の理論と Mamaladze の理論とでは，相転移の次数がそれぞれ 1 次と 2 次となるので，実験により　熱があれば Usui の理論による結論が正しいと判定できる。計算結果によれば，自由エネルギー $\Delta G(T\omega)$ は，$d_0 \sim d_{0c}$ では

$$\varDelta G \approx R^2 \hbar \frac{A^2}{B} (T_\lambda - T)^2 \times \frac{3}{2} d_0^2 (d_0 - d_{0c}),$$

この表式から潜熱の order estimate をすると，$1\,cm^3$ のヘリウムで，潜熱 $\approx T_\lambda (\varDelta S)_{T=T_\lambda^R} \sim (A^2/B) T_\lambda (T_\lambda - T_\lambda^R) d_{0c}^3$。これに比熱のとびの実験値から得られた値，$(A^2/B) \times (T_\lambda/\rho) = 5.2 \times 10^7 (erg/g \cdot deg.)$ を代入すると，$\omega = 35 (rad/sec)$ のとき約 $2\,erg$ であり小さい。λ 点のずれが観測できる程の実験ができれば，両者の違いを議論できると思われる。しかし系を乱さずに容器の角速度を大きくすることは，実験的に難かしいようであり，現在のところ，この論文で考えた問題は，Usui の理論の varidity を議論するのには適していないようである。

最後に我々の計算において圧力が空間的に一様であると考えた点を議論したい。常流体は剛体回転をしており，遠心力により容器内に圧力勾配が生じているが，それによる T_λ の変化は $10^{-2}\,deg.$ 程度である。$\omega = 35 (rad/sec)$[11] のとき容器内の最大圧力差は，$\rho R^2 \omega^2/2 \sim 10^2\,dyn/cm^2$ となる。従って T_λ の差異は，約 $10^{-6}\,deg/cm$ と評価される。重力による圧力差を無視するならば，その近似の範囲で，上記遠心力による圧力差及び T_λ の差異は無視できる。

議論をしていただいた大野鑑子教授，名古屋大学S研の皆様，特に碓井恒丸教授，山内淳氏，市川泰丸氏に感謝します。

参　考　文　献

1) L. P. Pitaevskii, Soviet Physics-JETP 8 (1959) 282.

2) V. L. Ginzburg and L. P. Pitaevskii, Soviet Physics-JETP 7 (1958) 858.

3) O. Penrose and L. Onsager, Phys. Rev. **104** (1956) 576.

4) T. Usui, Prog. Theor. Phys. **41** (1969) 1603.
T. Usui and J. Yamauchi, Lecture at Soviet-Japanese Conference on Low Temperature Physics, August 15, 1969.

5) T. Usui, Preprint.

6) 大見哲巨・碓井　丸，物性研究　**16**（1971）541.
Y. Ichikawa, T. Ohmi and T. Usui, Preprint.

7) Yu. G. Mamaladze, Soviet Physics-JETP **25** (1967) 479.

8) I. Rudnick and J. C. Fraser, J. Low Temp. Phys. **3** (1970) 225.
J. H. Sholtz, E. O. McLean and I. Rudnick, Phys. Rev. Letters **32** (1974) 147.

9) L. V. Kiknadze, Yu. G. Mamaladze and O. P. Cheishvili, Soviet Physics-JETP **21** (1965) 1018.

10) I. M. Khalatonikov, *Introduction to the Theory of Superfluidity* (Benjamin, New York, 1965), §16.

11) J. Andelin, F. Pobell and F. Wagner, J. Low Temp. Phys. **1** (1969) 417.